Strukturelle Gravitation

Internationaler Handel II

Julian Hinz

04.05.2020

Letzte Woche

- Datenexploration: Erst gemeinsam in Vorlesung, dann selbst in Anwendung
- “Naives” Gravitationsmodell: Erklärung bilateralen Handels durch Marktgröße und Distanz
- Beispiel für Politikevaluation und Vorhersage: Brexit

Diese Woche

- CES Nachfrage-System
- strukturelles Gravitationsmodell für internationalen Handel

  → Armington Modell

  → Verallgemeinerung

CES Nachfrage

Grenzrate der Substitution (GRS)

- Totale Differential der Nutzenfunktion $U(x_1, x_2)$:

$$dU = U_{x_1} \cdot dx_1 + U_{x_2} \cdot dx_2$$

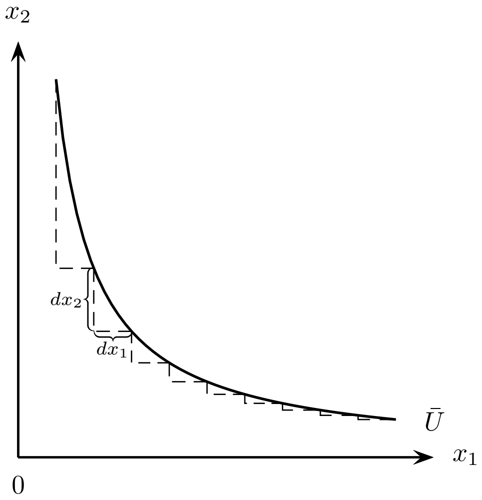
- Auf Indifferenzkurve gilt per Definition:

$$dU \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad dx_2/dx_1 = -U_{x_1}/U_{x_2}.$$

$\rightarrow$ Grenzrate der Substitution (GRS) dann definiert als (absolute) Steigung der Indifferenzkurve:

$$\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| = \frac{U_{x_1}}{U_{x_2}}.$$

Grenzrate der Substitution (GRS)



Substitutionselastizität

Substitutionselastizität ist definiert als

$$\sigma = \frac{d\left(x_2/x_1\right)}{x_2/x_1} \div \frac{d\left(\text{GRS}\right)}{\text{GRS}}$$

$$= \frac{d\left(x_2/x_1\right)}{x_2/x_1} \div \frac{d\left(U_{x_1}/U_{x_2}\right)}{U_{x_1}/U_{x_2}}$$

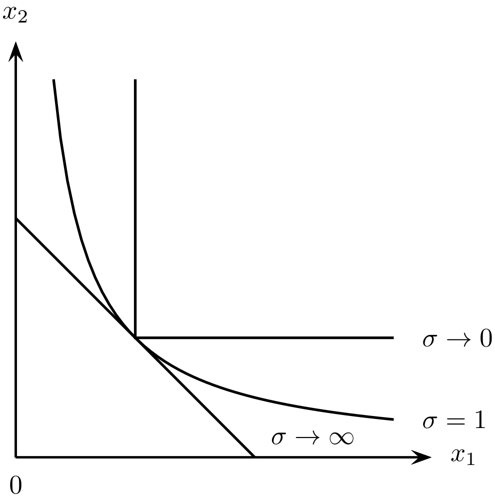
$\rightarrow$ relative Änderung des Konsumgüterverhältnisses im Verhältnis zur relativen Veränderung der GRS

Substitutionselastizität

Klassifikation der Substitutionsbeziehung:

- Perfekt komplementäre Konsumgüter ($\sigma \to 0$)
- Unabhängige Konsumgüter ($\sigma = 1$)
- Perfekt substitutive Konsumgüter ($\sigma \to \infty$)

Substitutionselastizität — Grenzfälle



Constant Elasticity of Substitution (CES) Funktion

- CES Nutzenfunktion für zwei Güter ist gegeben durch:

$$U\left(x_1, x_2\right) = \left[\alpha x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left(1-\alpha\right) x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad \text{mit} \;\; \sigma > 0.$$

Constant Elasticity of Substitution (CES) Funktion

- Substitutionselastizität ist definiert als

$$\frac{d\left(x_2/x_1\right)}{x_2/x_1} \div \frac{d\left(U_{x_1}/U_{x_2}\right)}{U_{x_1}/U_{x_2}} = \left[\frac{d\ln\left(U_{x_1}/U_{x_2}\right)}{d\ln\left(x_2/x_1\right)}\right]^{-1}.$$

- logarithmierte GRS beträgt dann für CES

$$\ln\left(U_{x_1}/U_{x_2}\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

$\rightarrow$ $\sigma > 0$ also konstante Substitutionselastizität

Nutzenmaximierung des Haushalts

- Haushalt maximiert seinen Nutzen gegeben Budget

$$\max_{x_1, x_2} \quad U(x_1, x_2) \quad \text{u. d. Nb.} \quad E = p_1 x_1 + p_2 x_2 .$$

$\rightarrow$ entsprechende Lagrange-Ansatz lautet

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(E - p_1 x_1 - p_2 x_2) .$$

Nutzenmaximierung des Haushalts

- Lagrange-Ansatz:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda (E - p_1 x_1 - p_2 x_2) .$$

$\rightarrow$ Bedingungen erster Ordnung dann:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = U_{x_1} - \lambda p_1 \overset{!}{=} 0, \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = U_{x_2} - \lambda p_2 \overset{!}{=} 0, \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = E - p_1 x_1 - p_2 x_2 \overset{!}{=} 0. \qquad \text{(iii)}$$

Herleitung der Marshallschen Nachfragefunktionen

- Gleichung (i) und (ii) ergeben die Optimalitätsbedingung:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{U_{x_1}}{U_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

$\rightarrow$ Grenzrate der Substitution (GRS) entspricht im Haushaltsoptimum dem relativen Güterpreisverhältnis

Herleitung der Marshallschen Nachfragefunktionen

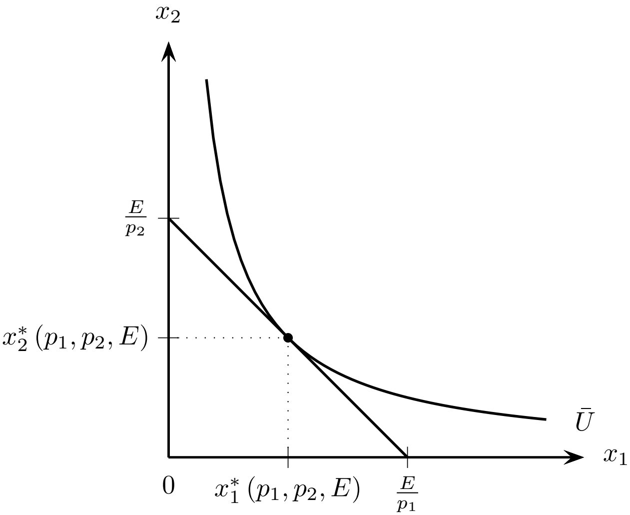
- Funktionaler Zusammenhang zwischen x_1, x_2, p_1 und p_2.
- Substitution für x_1 oder x_2 in Nebenbedingung (iii).

$\rightarrow$ Marshallsche Nachfragefunktionen:

$$x_1^* \equiv x_1^*\left(p_1, p_2, E\right),$$

$$x_2^* \equiv x_2^*\left(p_1, p_2, E\right).$$

Grafische Darstellung des Haushaltsoptimums



Armington Modell

Annahmen

Annahmen:

- Armington-Annahme: nationale Produktdifferenzierung
- Nachfrage: CES
- Produktion: Ausstattung, vollkommener Markt oder monopolistischer Wettbewerb
- Transport: Eisberg-Transportkosten

CES Nutzenfunktion

CES Nutzenfunktion:

$$U_j = \left[\sum_i \alpha_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_{ij}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad \text{mit} \quad \sigma > 0,$$

und länderspezifischem Nachfrageparameter $\alpha_i > 0$

Eisberg-Transportkosten

Eisberg-Transportkosten $t_{ij} \geq 1$:

- Anteil $1/t_{ij}$ des Gutes "schmilzt" beim Transport
- Dreiecksannahme: $t_{ij} < t_{i\ell} \cdot t_{\ell j} \ \forall \ i, j, \ell \ \wedge \ i \neq j \neq \ell.$

Herleitung der Importausgaben

Nutzenmaximierung:

$$\max_{c_{ij}} \quad U_j = \left[\sum_i \alpha_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_{ij}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad \text{u.d. Nb.} \quad E_j - \sum_i p_{ij} c_{ij} = 0$$

führt zur Lagrange-Funktion mit $p_{ij} = t_{ij} p_i$:

$$\max_{c_{ij}} \; \mathcal{L}\left(c_{ij}, \lambda\right) = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \sum_i \alpha_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_{ij}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \lambda \left(E_j - \sum_i t_{ij} p_i c_{ij} \right),$$

Herleitung der Importausgaben

Bedingungen erster Ordnung

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(c_{ij}, \lambda\right)}{\partial c_{ij}} = \alpha_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_{ij}^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda t_{ij} p_i \stackrel{!}{=} 0 \ \ \forall \ \ i,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(c_{ij}, \lambda\right)}{\partial \lambda} = E_j - \sum_i t_{ij} p_i c_{ij} \stackrel{!}{=} 0.$$

Herleitung der Importausgaben

Im Haushaltsoptimum entspricht die GRS dem Preisverhältnis:

$$\text{GRS} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_\ell}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left(\frac{c_{ij}}{c_{\ell j}}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{t_{ij} p_i}{t_{\ell j} p_\ell}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{\ell j} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_\ell}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{t_{ij} p_i}{t_{\ell j} p_\ell}\right)^{\sigma} c_{ij}.$$

Herleitung der Importausgaben

Substitution in die Budgetbedingung

$$
\begin{aligned}
E_j &= \sum_\ell t_{\ell j} p_\ell c_{\ell j} \\
&= \alpha_i^{\sigma-1} (t_{ij} p_i)^\sigma c_{ij} \, \sum_\ell (\alpha_\ell t_{\ell j} p_\ell)^{1-\sigma} \\
&= \alpha_i^{\sigma-1} (t_{ij} p_i)^\sigma c_{ij} \, P_j^{1-\sigma}
\end{aligned}
$$

mit $P_j \equiv \left(\sum_\ell (\alpha_\ell t_{\ell j} p_\ell)^{1-\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)}$ als aggregiertem “Dixit-Stiglitz”-Preisindex für Land j

Herleitung der Importausgaben

Nachfrage für Gut aus Land *j* in *i* ist dann

$$c_{ij} = (t_{ij}p_i)^{-\sigma}\, \alpha_i^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}}$$

und dementsprechend Ausgaben

$$\begin{aligned} X_{ij} &= t_{ij}p_i c_{ij} \\ &= (\alpha_i t_{ij} p_i)^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}} \end{aligned}$$

Optimale Importausgaben

Aus den Importausgaben

$$X_{ij} = (\alpha_i t_{ij} p_i)^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}} \quad \text{mit} \quad P_j \equiv \left[\sum_i (\alpha_i t_{ij} p_i)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

folgt:

- $\rightarrow$ X_{ij} direkt proportional zu aggregierten Auagaben E_j,
- $\rightarrow$ X_{ij} umgekehrt proportional zum relativen Lieferpreis $t_{ij}p_i/P_j$
- $\rightarrow$ σ bestimmt Sensitivität in Bezug auf Änderungen in $t_{ij}p_i/P_j$

Markräumung

Markträumungsbedingung ist $Y_i = \sum_j X_{ij}$, einsetzen und umstellen

$$Y_i = \sum_j (\alpha_i t_{ij} p_i)^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}}$$

$$= (\alpha_i p_i)^{1-\sigma} \sum_j t_{ij}^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}}$$

Herleitung der Gravitationsgleichung

Umstellen nach $(\alpha_i p_i)^{1-\sigma}$

$$
\begin{aligned}
(\alpha_i p_i)^{1-\sigma} &= \frac{Y_i}{\sum_j t_{ij}^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}}} \\
&= \frac{Y_i}{\Pi_i^{1-\sigma}}
\end{aligned}
$$

mit $\Pi_i \equiv \left(\sum_j t_{ij}^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}} \right)^{1/(1-\sigma)}$

Herleitung der Gravitationsgleichung

Einsetzen in Importausgaben ergibt die Gravitationsgleichung

$$X_{ij} = \frac{Y_i}{\Pi_i^{1-\sigma}} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}} t_{ij}^{1-\sigma}$$

mit

$$\Pi_i \equiv \left(\sum_j t_{ij}^{1-\sigma} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}} \right)^{1/(1-\sigma)} , \quad \text{und} \quad P_j = \left(\sum_i t_{ij}^{1-\sigma} \frac{Y_i}{\Pi_i^{1-\sigma}} \right)^{1/1-\sigma}$$

Strukturelle Gravitationsgleichung à la Armington

Gravitationsgleichung

$$X_{ij} = \frac{Y_i}{\Pi_i^{1-\sigma}} \frac{E_j}{P_j^{1-\sigma}} t_{ij}^{1-\sigma}$$

kann zerlegt werden in

- Marktgrößen: Y_i und E_j
- bilaterale Handelskosten: t_{ij}
- Maß für die Leichtigkeit von Exporteur *i*s Marktzugang: Π_i

  $\rightarrow$ auswärtiger multilateraler Resistenzterm
- Maß für die Leichtigkeit von Importeur *j*s Marktzugang: P_j

  $\rightarrow$ einwärtiger multilateraler Resistenzterm

Verallgemeinerung

Generelles Gravitationsmodell

Erinnerung an letzte Woche:

$$X_{ij} = G S_i M_j \phi_{ij}$$

$\rightarrow$ Generelle Gravitation

Strukturelles Gravitationsmodell

Wann wird aus genereller Gravitation eine strukturelle Gravitation?

Eigenschaften von Y_i und E_j:

- Produktion gleich der Summe aller Exporte: $Y_i = \sum_j X_{ij}$
- Konsum gleich der Summe aller Importe: $E_i = \sum_i X_{ij}$

Strukturelles Gravitationsmodell

- Anteil von Land j in Exporten von Land i dann

$$\pi_{ij} = \frac{X_{ij}}{Y_i} = \frac{X_{ij}}{\sum_j X_{ij}}$$

$$= \frac{GS_i M_j \phi_{ij}}{\sum_j GS_i M_j \phi_{ij}} = \frac{M_j \phi_{ij}}{\sum_j M_j \phi_{ij}}$$

$$= \frac{M_j \phi_{ij}}{\Omega_i} \quad \text{mit} \quad \Omega_i = \sum_j M_j \phi_{ij}$$

Strukturelles Gravitationsmodell

- π_{ij} einsetzen in die Importeurseite

$$E_j = \sum_i X_{ij} = \sum_i Y_i \pi_{ij}$$

$$= \sum_i Y_i \frac{M_j \phi_{ij}}{\Omega_i} = M_j \sum_i \phi_{ij} \frac{Y_i}{\Omega_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad M_j = \frac{E_j}{\sum_i \phi_{ij} \frac{Y_i}{\Omega_i}} = \frac{E_j}{\Phi_j} \quad \text{mit} \quad \Phi_j = \sum_i \phi_{ij} \frac{Y_i}{\Omega_i}$$

Strukturelles Gravity Modell

- Einsetzen in generelles Gravity Modell ergibt das strukturelle Gravity Modell

$$X_{ij} = \underbrace{\frac{Y_i}{\Omega_i}}_{S_i} \underbrace{\frac{X_j}{\Phi_j}}_{M_j} \phi_{ij},$$

$\rightarrow$ Ω_i und Φ_j sind die sogenannten “multilateralen Resistenzterme”

$$\Omega_i = \sum_j M_j \phi_{ij} = \sum_j \frac{E_j}{\Phi_j} \phi_{ij}$$

$$\text{und} \quad \Phi_j = \sum_i S_i \phi_{ij} = \sum_i \frac{Y_i}{\Omega_i} \phi_{ij}$$

Alternative Herleitungen des Gravitationsmodells

- Armington Modell
- Ricardianische Handelsmodelle à la Eaton & Kortum (2002)
- Heterogene Firmen à la Melitz (2003) und Chaney (2008)
- Sektorale Modelle, mit Input/Output Verknüpfungen
- ...

$\rightarrow$ viele sind strukturelle Gravitationsmodelle, alle sind generelle Gravitationsmodelle

Zusammenfassung

- Strukturelles Gravitationsmodell erklärt bilaterales Handelsvolumen als Funktion exogener und endogener Modellvariablen

  $\rightarrow$ Marktgrößen, bilaterale Handelskosten, und multilaterale Handelskosten

- Wichtiger Unterschied zur naiven Gravitationsgleichung: mikrofundierte multilaterale Resistenzterme

- Vielzahl von Mikrofundierungen generiert strukturelle Gravitationsgleichung

Strukturelle Gravitation

Internationaler Handel II

Julian Hinz

04.05.2020